Решение квадратного уравнения разными способами.

Рассмотрим разные способы решения квадратного уравнения $5x^2+6x+1=0$.

<u>Способ 1.</u> По общей формуле:

$5x^2 + 6x + 1 = 0.$

$a = 5, b = 6, c = 1.$

$D = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = 36 - 20 = 16, D > 0$, уравнение имеет два различных корня;

$x_1 = \frac{-6-\sqrt{16}}{2\cdot 5} = \frac{-10}{10} = -1$ $\quad$ $x_2 = \frac{-6+\sqrt{16}}{2\cdot 5} = \frac{-2}{10} = -0{,}2$

Ответ: -1; -0,2.

<u>Способ 2</u>. По фомуле с чётным b:

$5x^2 + 6x + 1 = 0.$

$a = 5, k = 3, c = 1.$

$D_1 = k^2 - ac = 3^2 - 5 \cdot 1 = 9 - 5 = 4, D > 0$, уравнение имеет два различных корня;

$x_1 = \frac{-3-\sqrt{4}}{5} = \frac{-5}{5} = -1$ $\quad$ $x_2 = \frac{-3+\sqrt{4}}{5} = \frac{-1}{5} = -0{,}2$

Ответ: -1; -0,2.

<u>Способ 3.</u> По свойству коэффициентов квадратного уравнения

1. Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

1) *Если,* $a+ b + c = 0$ *(т.е. сумма коэффициентов равна нулю),*

то $X_1 = 1$, $X_2 = \frac{c}{a}$

2) *Если* $a - b + c=0$, *то* $X_1 =-1$, $X_2 = \frac{-c}{a}$.

Доказательство.

1) Пусть $a+b+c=0$, тогда $a+c=-b$,

$D=(-(a+c))^2-4ac=a^2+2ac+c^2-4ac=a^2-2ac+c^2=(a-c)^2\geq 0$, значит уравнение имеет корни.

$X_{1.2}=\frac{a+c\pm\sqrt{(a-c)^2}}{2a}$

$X_{1,2}=\frac{a+c\pm|a-c|}{2a}$

Рассмотрим первый случай.

Пусть $a - c \geq 0,$ тогда $|a - c| = a -$ c, получим

$X_1 = \frac{a+c+a-c}{2a} = \frac{2a}{2a} = 1,$

$X_2 = \frac{a+c-a+c|}{2a} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$

Рассмотрим второй случай.

Пусть $a - c < 0,$ тогда $|a - c| = -a +$ c, получим

$X_1 = \frac{a+c-a+c}{2a} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a},$

$X_2 = \frac{a+c-(-a+c)}{2a} = \frac{2a}{2a} = 1$

Итак, доказали , что если a+b+c=0, то корни уравнения $X_1 = 1,\ X_2 = \frac{c}{a}$

2) Пусть a – b + c=0, тогда a+c= b,

$D=(a+c)^2-4ac=a^2+2ac+c^2-4ac=a^2-2ac+c^2=(a-c)^2\geq 0$, значит уравнение имеет корни.

$X_{1.2} = \frac{-(a+c)\pm\sqrt{(a-c)^2}}{2a}$

$X_{1,2} = \frac{-(a+c)\pm|a-c|}{2a}$

Рассмотрим первый случай.

Пусть $a - c \geq 0,$ тогда $|a - c| = a -$ c, получим

$X_1 = \frac{-a-c+a-c}{2a} = \frac{-2c}{2a} = \frac{-c}{a},$

$X_2 = \frac{-a-c-a+c|}{2a} = \frac{-2a}{2a} = -1$

Рассмотрим второй случай.

Пусть $a - c < 0,$ тогда $|a - c| = -a +$ c, получим

$X_1 = \frac{-a-c-a+c}{2a} = \frac{-2a}{2a} = -1,$

$X_2 = \frac{-a-c-(-a+c)}{2a} = \frac{-2c}{2a} = \frac{-c}{a}$

Итак, доказали, что если a-b+c=0, то корни уравнения $X_1 = -1$, $X_2 = -\frac{c}{a}$.

Решим уравнение $5x^2 + 6x + 1 = 0$. Так как a - b + c = 0 (5 – 6 +1 = 0), то $X_1 = -1$, $X_2 = \frac{-c}{a} = \frac{-1}{5} = -0{,}2$. Ответ: -1; -0,2.

Способ 4. Выделение полного квадрата:

$5x^2 + 6x + 1 = 0 \quad \vert :5$ $x^2 + \frac{6}{5}x + \frac{1}{5} = 0,$ $x^2 + 2 \cdot \frac{3}{5}x + \frac{9}{25} - \frac{9}{25} + \frac{1}{5} = 0$ $(x+\frac{3}{5})^2 - \frac{4}{25} = 0$ $(x+\frac{3}{5} - \frac{2}{5})(x+\frac{3}{5} + \frac{2}{5}) = 0$ $(x+\frac{1}{5})(x+\frac{5}{5}) = 0,$ Откуда $X_1 = -0{,}2$, $X_2 = -1$. Ответ: -1; -0,2.

Способ 5. Метод переброски старшего коэффциента.

$5x^2 + 6x + 1 = 0 \quad \vert \cdot 5$ $25x^2 + 30x + 5 = 0$ $(5x)^2 + 6(5x) + 5 = 0$

$y^2+6y+5=0$

Его корни y_1 и y_2 найдем с помощью теоремы обратной теореме Виета и окончательно:

$$x_1 = y_1/a \text{ и } x_1 = y_2/a.$$

Решим согласно теореме обратной теореме Виета D=36-20=16 >0

$\begin{cases} y_1+y_2 = -6, \\ y_1 y_2 = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} y_1 = -5, \\ y_2 = -1; \end{cases}$ $x_1 = -1$, $x_2 = -0{,}2$.

Ответ: -1, -0,2.

<u>Способ 6.</u> Разложение на множители способом группировки:

$5x^2 + 6x + 1 = 0$

$5x^2 + 5x+x + 1 = 0$

$(5x^2 + 5x)+(x + 1) = 0$

$5x(x + 1)+(x + 1) = 0$

$(x + 1) (5x + 1) = 0$

$x_1=-1$, $x_2=-0{,}2$

Ответ: -1, -0,2.

<u>Способ 7.</u> Приведение к виду $[f(x)]^2=[g(x)]^2$

$5x^2 + 6x + 1 = 0$,

$9x^2 + 6x + 1-4x^2 = 0$,

$9x^2 + 6x + 1=4x^2$,

$(3x+1)^2=(2x)^2$,

$|3x+1| = |2x|$, тогда получим

1) $3x+1=2x$,

   $3x-2x=-1$

$x=-1$

2) $3x+1=-2x$,

$3x+2x=-1$

$5x=-1$

$x=-0{,}2$

Ответ: -1, -0,2.

<u>Способ 8</u>.Уменьшение степени уравнения.

Подбором находим, что $x=-1$ корень данного уравнения, разделим трёхчлен

$5x^2 + 6x + 1$ на $x+1$.

$$\begin{array}{l|l} 5x^2 + 6x + 1 & \underline{x+1} \\ \underline{5x^2+5x} & 5x+1 \\ \quad x+1 & \\ \quad \underline{x+1} & \\ \quad\ 0 & \end{array}$$

В результате получим $5x+1$, тогда данный трёхчлен раскладывается на множители:

$5x^2 + 6x + 1 = (x+1)\,(5x+1)$.

Уравнение примет вид: $(x+1)\,(5x+1)=0$

Откуда $x_1=-1$, $x_2=-0{,}2$

Ответ: -1, -0,2.

<u>Способ 9.</u> Графический.

$5x^2 + 6x + 1 = 0 \ |:5$

$x^2 =-\frac{6}{5}x - \frac{1}{5}$,

$y=x^2$, $y=-\frac{6}{5}x - \frac{1}{5}$

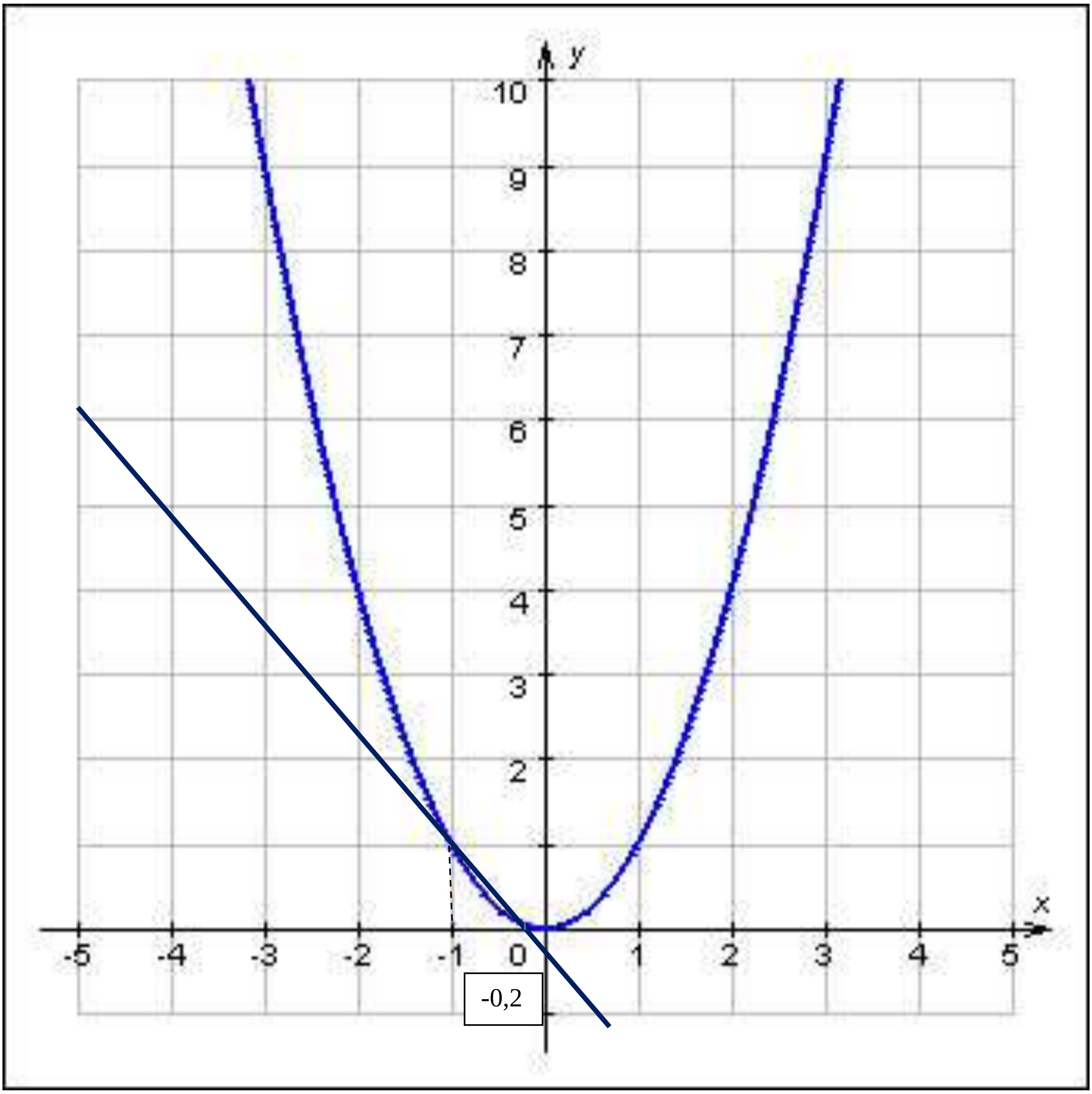
Графиком функции $y=x^2$ является парабола.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Графиком функции $y=-\frac{6}{5}x-\frac{1}{5}$ является прямая.

x	-1	2
y	1	-2,6

По этим таблицам построим графики

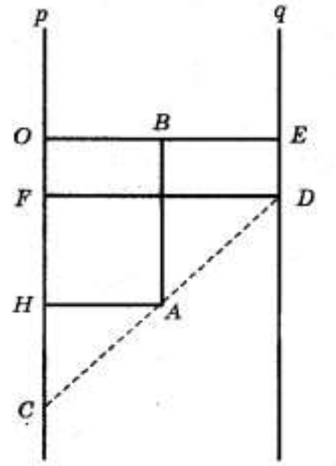


Ответ: $X_1 \approx -1$, $x_2 \approx -0,2$.

<u>Способ 10.</u> Решение квадратных уравнений с помощью номограммы.

Это старый и в настоящее время забытый способ решения квадратных уравнений, помещенный на с.83 сборника: Брадис В.М. Четырехзначные математические таблицы. - М., Просвещение, 1990.

Таблица XXII. Номограмма для решения уравнения $z^2 + pz + q = 0$. Эта номограмма позволяет, не решая квадратного уравнения, по его коэффициентам определить корни уравнения.



Криволинейная шкала номограммы построена

по формулам (рис.1):

$$OB = \frac{a}{1+z}, AB = \frac{-z^2}{1+z}.$$

Полагая $OC = p$, $ED = q$, $OE = a$ (все в см.), из

подобия треугольников CAH и CDF получим

пропорцию

$$\frac{p-q}{p-AB} = \frac{a}{OB},$$

откуда после подстановок и упрощений вытекает уравнение

$z^2 + pz + q = 0,$

причем буква z означает метку любой точки криволинейной шкалы.

Примеры.

1) Для уравнения $z^2 - 9z + 8 = 0$ номограмма дает корни $z_1 = 8{,}0$ и $z_2 = 1{,}0$ (рис. 2). *Ответ: 8,0*; *1,0.*

2) Решим с помощью номограммы уравнение

Рис.1

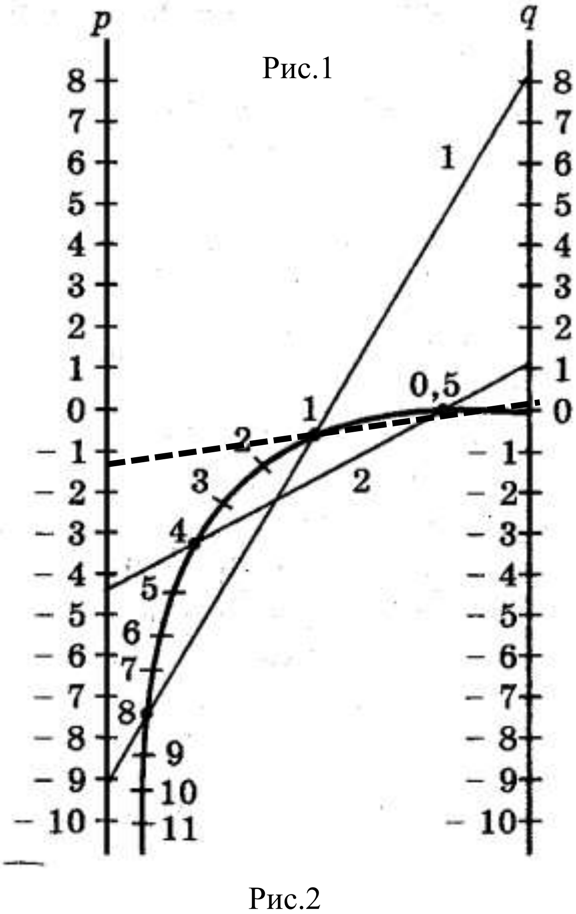


Рис.2

$2z^2 - 9z + 2 = 0.$

Разделим коэффициенты этого уравнения на 2,

получим уравнение $z^2 - 4{,}5z + 1 = 0.$

Номограмма дает корни $z_1 = 4$ и $z_2 = 0{,}5.$

Ответ: 4; 0,5.

3) Для уравнения $z^2 - 25z + 66 = 0$ коэффициенты p и q выходят за пределы шкалы, выполним подстановку $z = 5t$, получим уравнение $t^2 - 5t + 2{,}64 = 0,$

которое решаем посредством номограммы и получим $t_1 = 0{,}6$ и $t_2 = 4{,}4,$ откуда $z_1 = 5t_1 = 3{,}0$ и $z_2 = 5t_2 = 22{,}0.$

Ответ: 3; 22. [3]

$5x^2 + 6x + 1 = 0 \quad \vert :5$ $x^2 + \frac{6}{5}x + \frac{1}{5} = 0,$ $x^2+1{,}2x+0{,}2=0$ $x=-t,\ t^2 - \frac{6}{5}t + \frac{1}{5} = 0$ по рисунку $t=1$, $t=0.2$, тогда $x_1=-1$, $x_2=-0{,}2$ Ответ: -1, -0,2.